Regel: Beräkning av terminala värden
Peder Wikström
SLU, Umeå

2004-06-14
Version: 1.0
7 sidor

Regel: Beräkning av terminala värden

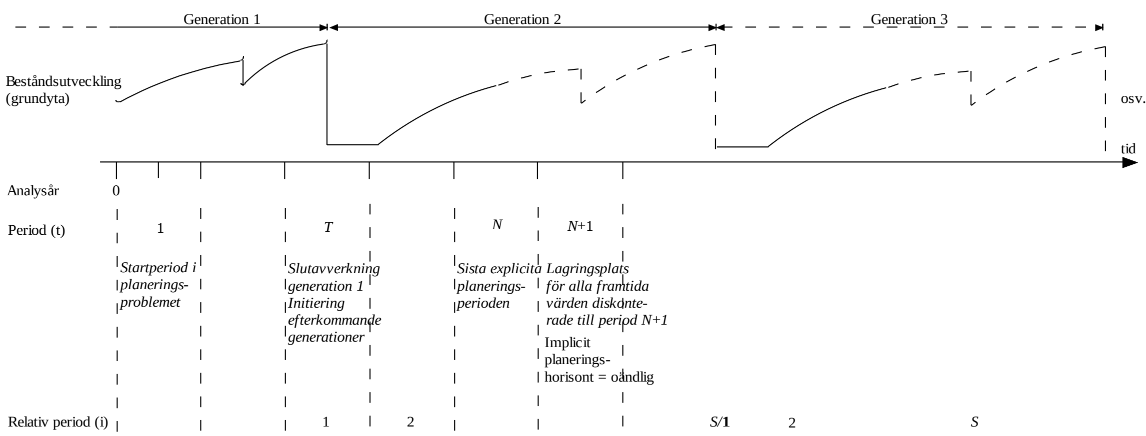
Projekt: Optimering

Innehåll:

1. INTRODUKTION

Vid optimering och rapportering vill man ha kontroll på till vilka perioder som olika värden hör. För att hantera en oändlig tidshorisont beräknas för varje åtgärdsenhet ett *terminalt värde* som läggs till perioden (N+1) efter den sista perioden i planeringshorisonten (N). Ett terminalt värde för en åtgärdsenhet består av värdet av all efterföljande skötsel för åtgärdsenheten.

2. TRAKTHYGGESBRUK



Figur 1. Exempel på trakthyggesbruk. Startläget (i period 1) är ett gallringsbart bestånd. Slutavverkning antas ske i period *T*. Vid denna tidpunkt initieras efterkommande skogsgenerationer.

Till grund för beräkningen av terminala värden ligger markvärdet som vi betecknar SEV (Soil expectation value). SEV är nuvärdet av alla framtida intäkter minus kostnader, räknat från startläge med barmark:

$$SEV = \sum_{i=1}^{\infty} \delta^{(i-1)} W_{rel}(i)$$

Eftersom man inte kan räkna på en oändlig tidshorisont beräknas SEV i praktiken genom att räkna på en omloppstid (gäller trakthyggesbruk) som antas repeteras för all framtid. Vi har då

$$SEV = \frac{1}{(1-\delta^{L-1})} \sum_{i=1}^{L} \delta^{(i-1)} W_{rel}(i) \qquad \text{(Funktion 1)}$$

där

r = diskonteringsränta (r = 0.03 = 3 % ränta),

δ = diskonteringsfaktor för en period = $\frac{1}{(1+r)^5}$ (om 5-års perioder används). Första periodens nettointäkter diskonteras inte, och därför blir första periodens diskonteringsfaktor = $\delta^{(i-1)}$,

$W_{rel}(i)$ = värde i relativa perioden[a] i, samt

L = relativ slutavverkningsperiod för generation 2 (samt för generation 3, 4 osv.). L = 5 betyder att varje generation slutavverkas i period 5 inom generationen, dvs. har en omloppstid på $5 \cdot (L-1)$ = 20 år.

Faktorn $1/(1-\delta^{L-1})$ är en upprepningsfaktor för en oändlig serie, med intervallet (L–1), vilket alltså motsvarar antalet perioder i en omloppstid.

SEV används alltså för att beräkna värdet för generation 2 och efterkommande generationer. Generation 2 aktiveras när generation 1 slutavverkas (se figur 1). Själva *SEV*-värdet är i sig ett diskonterat värde som är kopplat till en slutavverknings/ etableringstidpunkt[b]. Vi lägger till ett index till *SEV* så att SEV_T står för ett markvärde som aktiveras i period T. För att kunna följa utvecklingen i en åtgärdsenhet till och med perioden N, ”bryter man ut” de perioder som inträffar under planeringshorisonten från SEV_T-värdet och ”packar ihop” övriga värden till ett terminalt värde R_{N+1}. Detta terminala värde bokförs till period N + 1. Period N + 1 kommer således att (implicit) innehålla värdet för perioden själv, plus de diskonterade värden (diskonterade till period N + 1) för alla efterföljande perioder.
Vi har följande förhållande:

---

[a] OBS! Ett periodindex *i* är i detta fall relativt, ställt i relation till en etableringsperiod, och avser inte en absolut period (*t*) i planeringshorisonten (se figur 1)

[b] *SEV*-värdet måste sedan diskonteras (ytterligare) till starttidpunkten (t=1) för analysen. Detta kan dock göras i optimeringsrutinen och behöver inte beaktas vid beräkningen av terminala värden.

$$SEV_T = \sum_{i=1}^{\infty} \delta^{(i-1)} W_{rel}(i) = \sum_{i=1}^{N-T+1} \delta^{(i-1)} W_{rel}(i) + \sum_{i=N-T+2}^{\infty} \delta^{(i-1)} W_{rel}(i)$$

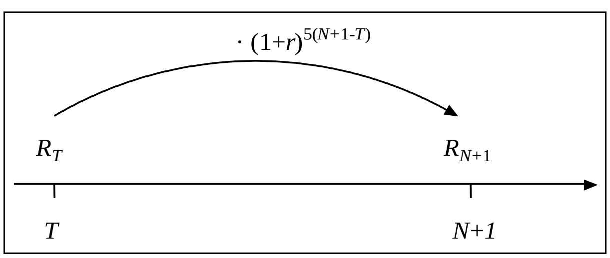
Vi ser i första delen av uttrycket ovan att en summering görs av de ($N– T$ + 1) första perioderna av de efterkommande generationerna, vilket är det antal perioder som ryms från och med etableringsperioden T till och med slutperioden N. Den andra summeringsdelen är ett terminalt värde som vi kan beteckna R_T, eftersom det är kopplat till att markvärdet aktiveras i period T. Nu kan det ju tyckas att både SEV_T och R_T är terminala värden som kan kopplas till period T. Detta är riktigt, men skillnaden dem emellan är alltså att värdena för perioder till och med N är inbakade i SEV_T, men utbrutna från R_T. Vi kan nu skriva om uttrycket ovan till

$$R_T = SEV_T - \sum_{i=1}^{N-T+1} \delta^{(i-1)} W_{rel}(i) \qquad \text{(Funktion 2)}$$

Vi måste dock justera R_T innan vi kan använda det! Alla W-värden i SEV_T är ju diskonterade till en tänkt etableringstidpunkt T, men vi vill placera det terminala värdet i period N + 1 (så att det senare vid optimering kan diskonteras som vilket annat periodvärde som helst). Därför måste R_T *prolongeras* (motsatsen till diskonteras, se figur 2) fram till ett framtida nuvärde:

$$R_{N+1} = R_T \cdot (1+r)^{5(N+1-T)} \qquad \text{(Funktion 3)}$$

där R_{N+1} är det terminal värdet om det bokförs i period N + 1, och 5·(N +1–T) är det antal år som värdet ska prolongeras givet en periodlängd om 5 år.



Figur 2. Prolongering av R_T till det terminala värdet R_{N+1}

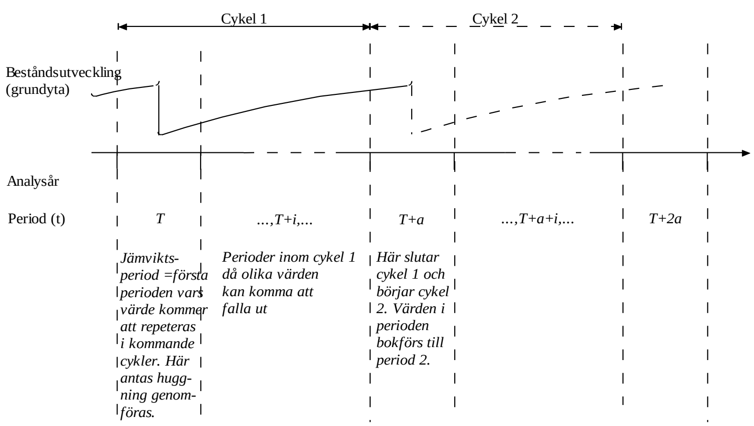
Sammanfattning: Använd funktionerna 1, 2 och 3 för att beräkna terminala värden.

3. ANDRA SKÖTSELSYSTEM

Om man ska räkna på alternativa skötselformer där det inte finns några egentliga omloppstider med start och slut som separerar två skogsgenerationer (t ex blädning), kan man räkna ut terminala värden på två sätt. Det ena bygger på antagandet att ett jämviktstillstånd uppnås (definition av ett jämviktstillstånd tas inte upp i detta dokument). Det andra bygger på att approximera en oändlig tidshorisont med ett tillräckligt stort antal perioder.

3.1 Antagande om jämvikt

En typ av jämviktstillstånd är faktiskt redan behandlat ovan i trakthyggesfallet, nämligen det att generation 2 och senare antas vara identiska. Man kan utnyttja samma förfarande här om under antagandet att det finns en oändlig serie av upprepande cykler (se figur 3), där varje cykel omfattar en eller några tidsperioder.



Figur 3. Antagande om jämviktstillstånd (steady state), då en viss sekvens upprepas med jämna cykler, där varje cykel innehåller a perioder.

Om vi betecknar *T* som jämviktsperiod, med vilket menas att *T* är den första period vars värde kommer att repeteras i kommande cykler, och antar att en cykel omfattar *a* perioder, så kan vi beräkna motsvarigheten till *SEV*. Denna motsvarighet brukar kallas *MFV* (Managed forest value) och beräknas enligt formeln

$$MFV_T = \frac{1}{1-\delta^a} \sum_{i=1}^{a-1} \delta^{(i-1)} W(T+i-1)$$

Definitionerna är nästan desamma som för funktion 1. En skillnad är att index *i* avser periodnummer relaterat till jämviktsperiod och inte etableringsperiod. En annan skillnad är att $W(t)$ används istället för $W_{rel}(i)$ och avser absolut och inte relativt periodnummer.

För att få reda på vilka värden som inträffar efter *T*, behöver vi inte lösa något separat problem som i fallet med generation 2 i trakthyggesfallet eftersom alla värden antas vara kända efter att jämvikt har uppnåtts. Det enda vi måste göra är att skriva fram tillståndet till och med period T + a – 1 (se figur 3). För resterande perioder fram till och med *N* gäller

$W(T+a+i) = W(T+i)$, i = 0,…, dvs.

$W(T+a) = W(T)$,
$W(T+a+1) = W(T+1)$, … osv.

Värdena för perioderna *T* till och med *N* ”bryts” ut från MFV_T enligt funktion 2 och 3 (SEV_T ersätts med MFV_T).

Ett särskilt enkelt fall får man om man har skötselprogram utan åtgärder, dvs. fri utveckling. Då sätts a = 1 och jämviktsperioden till *N*. Det finns i detta fall inga perioder att bryta ut och det terminala värdet erhålls direkt genom

$$R_{N+1} = \frac{1}{1-\delta^a} W(N) = \frac{1}{1-\delta} W(N)$$

där $W(N)$ = värdet i period *N* som antas falla ut varje period för evinnerlig tid.

3.2 Approximering med lång tidshorisont

Genom att öka antalet tidsperioder tillräckligt mycket då man genererar skötselprogram så kan approximera en oändlig tidshorisont. Hur lång tidshorisont som behövs beror på diskonteringsräntan. Med en ränta på 3 % kan man behöva en tidshorisont om 150-200 år (dvs. minst ca 30 perioder). Tanken är att de diskonterade värdena för perioder som ligger långt bort i framtiden blir så små att de inte påverkar tidigare perioders beslut och utfall. Ju större diskonteringsränta desto kortare tidshorisont behövs. Ex: Om man i planeringsproblemet har *N* perioder, och vid skötselprogramsgenerering 2*N* perioder, approximeras det terminala värdet till

$$R_{N+1} = \sum_{i=1}^{N} \delta^{(i-1)} W(N+i)$$

Observera att här diskonteraras värden som inträffar i period *N*+1 och senare till period *N*+1.

En fördel med skötselprogram som innehåller alla perioder (såsom då jämvikt uppnås vid period *N*, fri utveckling, eller förlängd tidshorisont enligt ovan), är att man inte behöver krångla med utbrytning av värden som infaller inom planeringshorisonten eftersom dessa periodvärden redan finns med i skötselprogrammen.

4. EXEMPEL

Antag att vi ska stoppa in periodvärden för ett skötselprogram (trakthygge) i en databas (för optimering eller rapportering). Vi antar här att en modell I ska användas, dvs. ett skötselprogram ska innehålla alla planeriongsperioder till och med *N*, samt ett terminalt värde i period *N* + 1.

Databastabellen antas ha följande kolumner:
UnitId = åtgärdsenhet,
AltId = Skötselprogrammets nummer,
Generation = generation i ordningen,
Period = tidpunkt/period (absolut),
Treatment = åtgärdskod (här: 0-Ingen, 1-plantering, 2-röjning, 3-gallring, 4-slutavverkning)
Value = värde. Observera (1) att det kan finna negativa värden (ex. vis vid plantering som är en kostnad, och (2) att det kan finnas värden även om ingen åtgärd utförs, samt (3) det kommer att finnas flera olika värdekolumner.

Antag att vi för åtgärdsenhet 1234 har genererat följande skötselprogram för generation 1:

Period (absolut)	1	2	3	4	5	6	7
Värde	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7
Åtgärd	0	0	0	3	0	0	4

Vi har också räknat ut SEV som innebär följande skötselprogram för generation 2, 3, ... osv.:

Period (relativ)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Värde	Wrel1	Wrel2	Wrel3	Wrel4	Wrel5	Wrel6	Wrel7	Wrel8	Wrel9	Wrel10
Åtgärd	0	1	2	0	0	3	0	0	0	4

Om vi stoppar in värden i databastabellen och har N = 20 får vi:

UnitId	AltId	Generation	Period	Treatment	Value
1234	1	1	1	0	W1
1234	1	1	2	0	W2
1234	1	1	3	0	W3
1234	1	1	4	3	W4
1234	1	1	5	0	W5
1234	1	1	6	0	W6
1234	1	1	7	7	W7
1234	1	2	7	0	Wrel1
1234	1	2	8	1	Wrel2
1234	1	2	9	2	Wrel3
1234	1	2	10	0	Wrel4
1234	1	2	11	0	Wrel5
1234	1	2	12	3	Wrel6
1234	1	2	13	0	Wrel7
1234	1	2	14	0	Wrel8
1234	1	2	15	0	Wrel9
1234	1	2	16	4	Wrel10
1234	1	3	16	0	Wrel1
1234	1	3	17	1	Wrel2
1234	1	3	18	2	Wrel3
1234	1	3	20 (=N)	0	Wrel4
1234	-	-	21 (=N+1)	-	R_{N+1}

Notera! (1) Här har antagits att en ny generation planteras först en period efter att föregående generation har avverkats. Detta motsvarar ungefär en hyggesvila. Vilken planteringsperiod som gäller beräknas vid inlyftning av ungskogsytor eller simulering av ny skog. (2) För de perioder i vilka generationsväxling sker finns två rader i tabellen.

5. REFERENSER

Wikström, P. (2000). Solving stand-level planning problems that involve multiple criteria and a single-tree growth model. Silvestria 167. Avhandling. (s. 9 samt artikel II).

Wikström , Backéus & Lämås (2004). A model for regional analyses of carbon sequestration and timber production. Manuskript.